TITLE:

擬対称領域のQ構造について(保型形式とL函数の研究)

AUTHOR(S):

佐武, 一郎

CITATION:

佐武, 一郎. 擬対称領域のQ構造について(保型形式とL函数の研究). 数理解析研究所講究録 1993, 843: 136-149

ISSUE DATE:

1993-06

URL:

http://hdl.handle.net/2433/83573

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 843 巻 1993 年 136-149

擬対称領域の Q-構造について

(On Q-structures of quasi-symmetric domains)

中央大学　佐武一郎 (Ichiro Satake)

0. 保型形式の理論において（特に尖点の議論において）単位円よりも上半平面の方が便利なことは周知の通りである．上半平面の高次元への拡張として“管状領域”(tube domain) が考えられるが，単位円の拡張である（有界）対称領域の中にも管状領域で表わされないものがある．1960 年代に Piatetski-Shapiro は（第 1 ～ 3 種）“ジーゲル領域”の概念を導入し，次のような結果を得た．

1) すべての均質有界領域は第 2 種ジーゲル領域として表わされる．

2) 古典型対称領域は，その一つの境界成分を与えたとき，それを底とする第 3 種ジーゲル領域として表わされる．

この 2) の結果は後に Korányi-Wolf によって一般の対称領域の場合に拡張された（これらの文献については [S4] 参照）．

話を明確にするために，第 2 種ジーゲル領域の定義を与えておく．U,V をそれぞれ実 n 次元，複素 m 次元のベクトル空間とする：$U \simeq \mathbf{R}^n, V \simeq \mathbf{C}^m$．ただし V は複素構造 I を附与された実 $2m$ 次元空間と考える． $V(\mathbf{C}) = V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ とし

$$V_\pm = \{v \in V(\mathbf{C}) \mid Iv = \pm iv\}$$

とおけば

$$V(\mathbf{C}) = V_+ \oplus V_-, \quad \bar{V}_+ = V_-, \quad (V,I) \simeq V_+$$

が成立する．$\mathcal{C}$ を U に含まれる（原点 0 を頂点とする）開凸錐体（ open convex cone ）で“非退化”なもの，すなわち$\bar{\mathcal{C}} \cap (-\bar{\mathcal{C}}) = \{0\}$ であるもの，とする．$A: V \times V \to U$ を交代双一次写像で“$\mathcal{C}$- positive”なもの，すなわち条件

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} A(v, Iv') \text{ は } v, v' \in V \text{ に関して対称}, \\ A(v, Iv) \in \bar{\mathcal{C}}, \text{ かつ } A(v, Iv) = 0 \Longleftrightarrow v = 0 \end{cases}$$

をみたすもの，とする．このとき素材 $(U, V, \mathcal{C}, A, I)$ によって定義される（第 2 種）**ジーゲル領域** とは，$U(\mathbf{C}) \times V_+ \simeq \mathbf{C}^{n+m}$ の中の領域

$$\text{(2)} \qquad \mathcal{D} = \{(u, w) \in U(\mathbf{C}) \times V_+ \mid \operatorname{Im} u - \frac{1}{2i} A(w, \bar{w}) \in \mathcal{C}\}$$

である．

$V = \{0\}$ のとき，$\mathcal{D} = U + i\mathcal{C}$ は管状領域（= 第 1 種ジーゲル領域）と呼ばれる．本稿においては純粋に第 2 種の場合，すなわち $V \neq \{0\}$ の場合だけを考える．

さて（有界）対称領域は均質ジーゲル領域であるが，後者の自己同型群に関する Kaup-Matsushima-Ochiai，村上等の結果（ 1970-72）を使って，前者は均質ジーゲル領域の中で三つの条件 (i)，(ii)，(iii) によって特徴づけられることが示された（ [S4]， Ch.V ）．これらの条件の中 (i)，(ii) は自然なものであるが，(iii) は非常に技術的に見える．そこで (i)，(ii) だけをみたすジーゲル領域を **擬対称領域**（ quasi-symmetric domain ）と名づけることにする．

本文で示すように，この条件 (i)，(ii) は複素構造 I に関係なく，$(U, V, \mathcal{C}, A)$ だけに関して述べることができる．そして素材 $(U, V, \mathcal{C}, A)$ を固定したとき，条件 (1) をみたす I 全体の集合 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{D}$ の“変形空間”と考えられる．$\mathcal{S}$ はいつでも古典型対称領域になることが知られている（ [S3] ）．

上述のように対称領域はその任意の境界成分 $\mathcal{F}$ の上のファイバー空間（第 3 種ジーゲル領域）として表わされるが，その際 $\mathcal{F}$ の一点の上のファイバー $\mathcal{D}$ は擬対

称領域になり，その変形空間 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{F}$ と一致する．実際，“標準的”（standard）な擬対称領域はすべてこのようにして得られる．しかし非標準的（定義は後述）なものの中にはこの形では得られないものもある．

さて以上の結果は約 15 年前（1970 年代）に得られていたものであるが，今これを revive したいと思う理由は次の二つである．

1. 擬対称領域の $\mathbf{Q}$-構造が簡単に決定できることに注意する．

2. $\mathcal{D}$ が対称管状領域である場合，これから生じる（第 1 種）尖点特異点についてはすでに多くの研究がある．特にその幾何学的不変量と $\mathcal{C}$ に附ずいするゼータ関数の 0 における値との関係についてはヒルベルト・モジュラーの場合に関する Hirzebruch 予想（1974）（= Atiyah-Donnelly-Singer，Müller の定理（1983, 84））から発展し，最近（1991 年）尾形，石田等によって一般の場合に（代数的に）証明された（[SO1]，[O1]，[I1]）．しかし更に擬対称領域から生じる（第 2 種）尖点特異点を考えることによって，このゼータ関数の負の整数における特殊値に対しても同様の関係式を得ることが期待される．

本稿ではこの 1 について概説し，最後に 2 について簡単に触れたいと思う．

1. 自己同型群．　まず素材 (U, V, A) によって定義される Heisenberg 群 $\tilde{V}$ について述べる． $\tilde{V}$ は集合（位相空間）としての直積 $U \times V$ に積を

$$(u, v) \cdot (u', v') = (u + u' - \frac{1}{2}A(v, v'), v + v')$$

によって定義したものである．明らかに自然な準同型に関して完全系列

$$1 \longrightarrow U \longrightarrow \tilde{V} \longrightarrow V \longrightarrow 1 \tag{3}$$

が成立する．(1) をみたす $(\mathcal{C}, I)$ が存在すれば， U は $\tilde{V}$ の中心と一致する．

次に一次変換の群

$$(4)\qquad \begin{cases} G_1 = \mathrm{Aut}\,(U,\mathcal{C}) = \{g_1 \in GL(U) \mid g_1\mathcal{C} = \mathcal{C}\}, \\ G = \{(g_1, g_2) \in G_1 \times GL(V) \mid g_1 \circ A = A \circ (g_2 \times g_2)\}, \\ G_2 = Sp(V, A) = \{g_2 \in GL(V) \mid (1, g_2) \in G\} \end{cases}$$

等が定義される．これらに関しても自然な完全系列

$$(5)\qquad 1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G \xrightarrow{\rho_1} G_1$$

が得られる．明らかに $G \subset \mathrm{Aut}\,\tilde{V}$ であるから，半直積 $G \cdot \tilde{V}$ を作ることができる．

これらの群の中 G_2 は reductive な代数群になり， $I \in G_2$ で，$g_2 \mapsto I^{-1}g_2I$ は G_2 の Cartan involution になる．すなわち

$$G_{2I} = G_2 \cap GL(V, I)$$

は G_2 の極大コンパクト部分群になり，G_2 に附ずいする対称空間 G_2/G_{2I} は

$$(6)\qquad \mathcal{S} = \mathcal{S}(V, A, \mathcal{C}) = \{I' \mid V\text{の複素構造で (1) をみたすもの}\}$$

と同一視される． $\mathcal{S}$ は $\mathcal{D}$ の変形空間 (deformation space) であり，古典型対称領域になることが知られている（[S3]）．

さて $\tilde{V}$ の複素化を考えれば，

$$\tilde{V}(\mathbf{C}) = V_+ \cdot U(\mathbf{C}) \cdot V_- \quad \text{（位相的直積）},$$
$$\tilde{V} \cap V_+ \cdot V(\mathbf{C}) = U$$

が成立するので，$\tilde{V}$ の $V_+ \times V(\mathbf{C})$ への自然な作用（保型因子）を定義することができ，それに関して $\mathcal{D}$ は不変である（[S4]，pp.119-121）．一方

$$G_I = \{(g_1, g_2) \in G \mid g_2 \in GL(V, I)\}$$

とおけば，G_I は $\mathcal{D}$ に自然に作用し，その作用は上記 $\tilde{V}$ の作用と compatible になる．すなわち半直積 $G_I \cdot \tilde{V}$ が $\mathcal{D}$ に作用する．$\mathcal{D}$ のアフィン同型全体の群を Aff $\mathcal{D}$ とかけば，実は Aff $\mathcal{D} = G_I \cdot \tilde{V}$ となることが容易に示される．

2. **擬対称領域．** ジーゲル領域 $\mathcal{D}$ はその素材に関し次の二つの条件 (i)，(ii) が成立するとき擬対称（ quasi-symmetric ）であるという．

(i) $\mathcal{C}$ は自己共役（ self-dual ）かつ均質な錐体である．

“均質”とは勿論 G_1 が $\mathcal{C}$ に推移的に作用することをいみする．一般に U の（正値定符号）内積 $<>$ に関し

$$\mathcal{C}^* = \left\{ u \in U \mid <u, u'> > 0 \ \text{ for all } u' \in \bar{\mathcal{C}} - \{0\} \right\}$$

とおけば，$\mathcal{C}^*$ も非退化な開凸錐体になる．ある内積に関して $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$ となるとき，$\mathcal{C}$ を自己共役という．

条件 (i) の下に ${}^tG_1 = G_1$ となるから，G_1 は reductive な“代数群”（弱いいみの代数群）になる；すなわち G_1 の（単位元の）連結成分 G_1° はある（ $\mathbf{R}$ 上定義された）代数群の連結成分と一致する．

(ii) 系列 (5) において ρ_1 は（弱いいみで）“全射”になる；すなわち $\rho_1(G^\circ) = G_1^\circ$ が成立する．

条件 (i)，(ii) の下に G も（弱いいみの）“代数群”になる．$(G/G_2)^\circ \simeq G_1^\circ$ で，G_1, G_2 が共に reductive であるから，G も reductive である．従って G の連結な“代数的”正規部分群 G_1' で

$$G^\circ = G_1' \cdot G_2^\circ, \quad G_1' \cap G_2 = (\text{finite}) \tag{7}$$

となるようなものが（唯一つ）存在する．このとき $\rho_1 \mid G_1' : G_1' \to G_1$ は isogeny（局所同型）になる．従って G, G_1, G_1', G_2 のリー環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1', \mathfrak{g}_2$ で表わせば

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1' \oplus \mathfrak{g}_2, \quad \mathfrak{g}_1' \simeq \mathfrak{g}_1,$$
$$\mathfrak{g}_1' = \{(x, \beta(x)) \mid x \in \mathfrak{g}_1\} \tag{8}$$

が成立する．ここに β は $\mathfrak{g}_1$ の V における表現である．$I \in G_2^\circ$ であるから，(7) により $[G_1', I] = 0$，従って $\beta(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{gl}(V, I)$ となる．

さて (i) が成立するような内積 $<>$ を一つ固定し，それに関する $x \in \mathrm{End}\, U$ の共役を ${}^t x$ で表わす．$x \longmapsto -{}^t x$ は $\mathfrak{g}_1$ の一つの Cartan involution になる；それに対応する $\mathfrak{g}_1$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1$ とする．このとき適当な $e \in \mathcal{C}$ をとれば，

$$\mathfrak{k}_1 = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid xe = 0\} \tag{9}$$

となることが知られている（後述の例参照）．従って自然な対応により $\mathfrak{p}_1 \simeq \mathfrak{g}_1/\mathfrak{k}_1 \simeq U$（ベクトル空間の同型）が成立する．$u \in U$ に対応する $\mathfrak{p}_1$ の元を T_u とかく．T_u は性質

$$T_u \in \mathfrak{g}_1, \quad {}^t T_u = T_u, \quad T_u e = u \tag{10}$$

によって一意的に定まる元である；特に $T_e = 1_U$．（余談：U に $u \circ u' = T_u u'$ によって積を定義すれば，U は formally real な Jordan 代数になることが知られている．これらについては [S4]，Ch.I, §8 参照.）

3. Admissible triples. 上記 $<>$ と e との対応は，適当な正規化によって，1 対 1 にすることができる．そのとき

$$a(v, v') = <e, A(v, v')> \tag{11}$$

とおく．a は V 上の非退化交代双一次形式であり，$a(v, Iv')$ は対称，正値定符号

である.（このような組 (a, I) を V の“エルミット構造”という.）

$$h(v, v') = a(v, Iv') + ia(v, v')$$

とおけば, h は V 上の正値定符号エルミット形式になる. h に関する共役を $*$ によって表わす. $\mathrm{End}\,(V, I)$ の元で自己共役（エルミット的）な元全体を $\mathrm{Her}\,(V, a, I)$ で表わす.

さて任意の $u \in U$ に対し

$$< u, A(v, v') >= a(v, \varphi(u)v') \tag{12}$$

となるような $\varphi(u) \in \mathrm{End}\, V$ が一意的に定まる. 容易にわかるように, φ は線形で

$$\varphi : U \longrightarrow \mathrm{Her}\,(V, a, I), \quad \varphi(e) = 1_V$$

である.

さらに $\{(x, \beta(x) \,|\, x \in \mathfrak{g}_1\}$ が G の“代数的”な部分群 G_1' のリー環であることから, 関係式

$$\begin{cases} \varphi(xu) = \beta(x)\varphi(u) + \varphi(u)\beta(x)^* \\ \beta({}^t x) = \beta(x)^* \qquad (x \in \mathfrak{g}_1, u \in U) \end{cases} \tag{13}$$

が導かれる. これらの式から (10) により

$$\varphi(u) = 2\beta(T_u), \quad \text{特に } \beta(1_U) = \frac{1}{2}1_V \tag{14}$$

が得られる. (13) の第 1 式は β が線形写像 φ に関して equivariant であることを示している. (13) をみたす (β, φ) を equivariant な組という. (14) からわかるように β と φ とは互いに他を決定する. Equivariant な組 (β, φ) は非常に特殊なもので簡単に分類することができる. そしてそれが本質的に擬対称領域 $\mathcal{D}$ の分類を与える（[S1], [S2], または [S4], Ch.V, §5 参照）.

一般に $e \in \mathcal{C}$, V の非退化交代双一次形式 a, 表現 $\beta : \mathbf{g}_1 \to \mathbf{gl}(V, I)$ からなる triple (e, a, β) は, (13) をみたすような線形写像 $\varphi : U \to \mathrm{Her}(V, a, I)$, $\varphi(e) = 1_V$ が存在するとき, **admissible** な triple という (この条件は I を使わずに述べることができる.) 上述のように A によって (任意の $e \in \mathcal{C}$ に対し) admissible な triple (e, a, β) が定まるが, 逆に admissible な triple (e, a, β) から上と逆の操作によって A を構成することができる. このように A と (e, a, β) のある類とが 1 対 1 に対応する. 従って $\mathcal{D}$ を構成する素材として $(U, V, \mathcal{C}, A)$ のかわりに $(U, V, \mathcal{C}, e, a, \beta)$ をとることができる. そのとき, 変形空間 $\mathcal{S}$ は

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(V, a, \beta) = \{I \mid (a, I) \text{ は } V \text{のエルミット構造}, [\beta(\mathbf{g}_1), I] = 0\} \tag{15}$$

と表わされる.

4. Q-構造の決定. 擬対称領域 $\mathcal{D}$ の $\mathbf{Q}$-構造とは実ベクトル空間 U, V の $\mathbf{Q}$-構造で $(\mathcal{C}, A)$ が $\mathbf{Q}$ 上定義され $I \in \mathcal{S}$ が (後述のいみで) "有理点" になるようなもののことである. **3** に述べたことからそれは次の順序で決定される.

1) $(U, \mathcal{C})$ の $\mathbf{Q}$-型の決定. これは $(U, \mathbf{g}_1)$ の $\mathbf{Q}$-型を求めることと同じである.

2) 表現 (V, β) を $\mathbf{Q}$ 上で構成すること. (これは [S1] の結果から直ちに得られる.)

3) $(e, a)/\mathbf{Q}$ の決定.

4) $\mathcal{S}$ の "有理点" I の決定 (これは [S5] に与えられている).

擬対称領域 $\mathcal{D}$ を定義する素材に関して次のような "完全可約性" が成り立つ. まず $(U, \mathcal{C})$ の既約分解を

$$U = \bigoplus_{i=1}^{\ell} U^{(i)}, \quad \mathcal{C} = \prod \mathcal{C}^{(i)}, \quad \mathcal{C}^{(i)} \subset U^{(i)} \tag{16a}$$

とすれば，これに対応して

$$\mathfrak{g}_1 = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathfrak{g}_1^{(i)}, \quad \mathfrak{g}_1^{(i)} = \{1_{U^{(i)}}\}_{\mathbf{R}} \oplus \mathfrak{g}_1^{(i)s}, \tag{16b}$$

$\mathfrak{g}_1^{(i)s}$ は単純，又は $=\{0\}$ となる．また

$$\begin{cases} V = \bigoplus_{i=1}^{\ell} V^{(i)}, & \beta = \bigoplus \beta^{(i)}, \\ e = \sum e^{(i)}, & a = \sum a^{(i)}. \\ I = \sum I^{(i)}, & \\ \beta^{(i)} \ : \ \mathfrak{g}_1^{(i)} \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V^{(i)}, I^{(i)}) \end{cases} \tag{16c}$$

と分解される．これによって擬対称領域の $\mathbf{R}$ 上の分類は $(U, \mathcal{C})$ が既約な場合に，$\mathbf{Q}$ 上の分類は $\mathbf{Q}$-既約な場合に帰着される．今，$(U, \mathcal{C})$ が $\mathbf{Q}$ 上定義され（i.e. $(U, \mathfrak{g}_1)$ が $\mathbf{Q}$ 上定義され）$\mathbf{Q}$-既約であるとすれば，$(U^{(1)}, \mathfrak{g}_1^{(1)})$ はある ℓ 次の総実な代数体 F の上で定義され

$$U = R_{F/\mathbf{Q}}(U^{(1)}), \quad \mathfrak{g}_1 = R_{F/\mathbf{Q}}(\mathfrak{g}_1^{(1)})$$

となる（$R_{F/\mathbf{Q}}$ は Weil の関手）．よって $(U, \mathcal{C})$ の $\mathbf{Q}$-型を求めることは既約な $(U^{(1)}, \mathcal{C}^{(1)})$ の F-型を求めることと同値になる．またそのとき，(V, β) が $\mathbf{Q}$ 上定義されているならば，$(V^{(1)}, \beta^{(1)})$ は F 上定義され，$(V, \beta) = R_{F/\mathbf{Q}}(V^{(1)}, \beta^{(1)})$ となる．

例: $(III_{m_1;m_2})$．まずこの記号で表わされる既約な $\mathbf{R}$-型の構成を述べる．m_1, m_2 を正の整数，

$$n = \frac{1}{2} m_1(m_1+1), \quad m = 2m_1m_2,$$

$$U = \mathrm{Sym}_{m_1}(\mathbf{R}), \quad \mathcal{C} = \mathfrak{p}_{m_1}(\mathbf{R}), \quad V = \mathbf{R}^{2m_1m_2}$$

とする．二つの実ベクトル空間 $V_1 \simeq \mathbf{R}^{m_1}$, $V_2 \simeq \mathbf{R}^{2m_2}$ を用意し

$$U = S(V_1 \otimes V_1) \quad \text{（2階対称反変ベクトルの空間）},$$
$$(17) \qquad V = V_1 \otimes V_2$$

とかく（ S は対称化作用素）． $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{gl}(V_1) \simeq \mathfrak{gl}_{m_1}(\mathbf{R})$ は U に自然に作用し， $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Lie\,Aut}(U, \mathcal{C})$ と同一視される．一方， $\mathfrak{g}_1$ の V_1 への作用を β_1 とかき， $\beta : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{gl}(V)$ を $\beta = \beta_1 \otimes 1$ によって定義すれば，**3** に述べた条件をみたす表現が得られる．この場合そのような表現はこの形のものに限ることが知られている（[S1]）．

さて $e \in \mathcal{C} \subset U = S(V_1 \otimes V_1) \subset \mathrm{Hom}(V_1^*, V_1)$ を一つ固定すれば，写像としての e の逆は

$$e^{-1} \in \mathcal{C}^* \subset U^* = \mathrm{Sym}(V_1) \subset \mathrm{Hom}(V_1, V_1^*)$$

である．このとき a および I は， $\beta(\mathbf{k}_1) = \beta_1(\mathbf{k}_1) \otimes 1$ に関し不変であるから

$$a = e^{-1} \otimes a_2, \quad I = 1 \otimes I_2$$

の形になり， (a_2, I_2) は V_2 のエルミット構造を与えることがわかる．従って

$$(18) \qquad G_2 \simeq Sp(V_2, a_2), \quad \mathcal{S} \simeq \mathcal{S}(V_2, a_2) \quad \text{（Siegel 空間）}$$

となる．又この admissible triple (e, a, β) に対応する $A : V \times V \to U$ は

$$(19) \qquad A(v_1 \otimes v_2, v_1' \otimes v_2') = S(v_1 \otimes v_1') \cdot a_2(v_2, v_2')$$

で与えられる．

さて上の構成はすべて代数的であるから， $\mathbf{Q}$ 上定義された V_1, V_2 から出発し， $U, \mathfrak{g}_1, V$ の $\mathbf{Q}$-構造を自然に定義すれば β は $\mathbf{Q}$ 上定義された表現になる．さらに $e \in \mathcal{C}$, a_2 等も $\mathbf{Q}$-有理的なものをとれば， A も $\mathbf{Q}$ 上定義された双一次写像になる．最後に [S5] のいみでの有理点 $I_2 \in \mathcal{S}(V_2, a_2)$ をとれば， $(U, V, \mathcal{C}, A, I)/\mathbf{Q}$ が得

られる．より一般に ℓ 次総実な代数体 F をとり， V_1, V_2, e, a_2 をすべて F 上定義されたものとすれば，同様にして $(U, V, \mathcal{C}, A, I)/F$ が得られる．これを Weil の関手 $R_{F/\mathbf{Q}}$ によって $\mathbf{Q}$ 上に引き戻せば，$(III_{m_1;m_2})^{\ell}$ の $\mathbf{Q}$-単純な $\mathbf{Q}$-型が得られる．この場合，他に総不定符号四元数体から得られる $\mathbf{Q}$-型が存在する．

注意 1. $(III_{m_1;0})$ はジーゲル上半空間 (III_{m_1}) に他ならないが，$(III_{m_1;m_2})$ $(m_2 > 0)$ が対称領域にあるのは $(III_{1;m_2}) \simeq (I_{m_2+1,1})$ の場合に限る．

注意 2. I が $\mathcal{S}$ の“有理点”であるとは，$\mathfrak{g}_2$ の Cartan involution $y \to I^{-1}yI$ が $\mathbf{Q}$ 上定義されていることをいみする．I 自身は $\mathbf{Q}$-有理的であるとは限らない．上の例の場合 $\mathcal{S}$ は有理点をもつが，一般には有理点が存在しない場合もある．その場合 $\mathcal{D}$ は $\mathbf{Q}$-構造を持たない！（[S5]参照）

一般に $\mathcal{C} \simeq \mathbf{p}_{m_1}(D_1)$, $D_1 = \mathbf{R}, \mathbf{H}, \mathbf{C}$ のとき，あるいはこれらの積として表わされるとき，$\mathcal{C}$ および $\mathcal{D}$ は標準型であるという．上の構成において総実代数体 F の所を，一般に positive involution をもつ $\mathbf{Q}$ 上の多元体（すなわち，総実代数体 F の上の四元数体で総定符号又は総不定符号であるもの，またはある CM-拡大 Z/F に関し，Z 上の中心的多元体で第 2 種の involution をもつもの）でおきかえて同様の構成を行うことができる．このようにして標準型の擬対称領域の $\mathbf{Q}$- 既約な $\mathbf{Q}$-型はすべて得られることが証明される（[S6]）．

この他に $\mathcal{C}$ が 2次形式によって定義される（非標準的な）場合があるが，その場合 β_1 はスピン表現になり，対応する Clifford 代数を使えば同様にして $\mathcal{D}$ の $\mathbf{Q}$-型が構成される．

5. 第 2 種の尖点特異点. 擬対称領域 $\mathcal{D}$ の与えられた $\mathbf{Q}$-構造に対し，$\tilde{V}, G$ 等の数論的部分群が考えられる．まず $\tilde{L}$ を $\tilde{V}$ の数論的部分群とし，$M = \tilde{L} \cap U$, $L = \tilde{L} + U/U$ とおく．M, L はそれぞれ U, V の中の通常のいみの lattice になり，

完全系列

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow \tilde{L} \longrightarrow L \longrightarrow 1 \tag{20}$$

が成り立つ． $\tilde{V}/\tilde{L}$ はコンパクトである．($\tilde{L}$ は M, L と 2次指標 $L \to \frac{1}{2}M/M$ によって定まる．)

次に G_I の数論的部分群 Γ をとり，$\Gamma_2 = \Gamma \cap G_2$, $\Gamma_1 = \Gamma G_2/G_2$ とおけば，Γ_2, Γ_1 はそれぞれ G_{2I}, G_1 の数論的部分群になり

$$1 \longrightarrow \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow 1$$

が成り立つ． Γ_2 は有限群である．今 Γ として $\Gamma \cdot \tilde{L} = \tilde{L}$, かつ torsion-free であるものをとる．そのとき $\Gamma_2 = \{1\}$, $\Gamma \simeq \Gamma_1$ となる．

このような $\Gamma, \tilde{L}$ に対し，半直積 $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cdot \tilde{L}$ は $G_I \cdot \tilde{V} = \mathrm{Aff}\,\mathcal{D}$ の数論的部分群になり，$\mathcal{D}$ に properly discontinuous かつ free に作用する．従って商空間 $\tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{D}$ を考えることができる．

特に G_1 の $\mathbf{Q}$-rank $= 1$ のとき，$\Gamma_1\backslash\mathcal{C}/\mathbf{R}_+^\times$ はコンパクトになるから，$\tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{D}$ に一点 p (無限遠点) をつけ加えて局所的に完備化することができる．

$$X = \tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{D} \cup \{p\} \tag{21}$$

とおけば，X は p を孤立特異点にもつ normal analytic space の構造をもつ． p を第 **2** 種の尖点という．

この場合にも Mumford の toroidal embeddings の方法により滑らかな完備化

$$\widetilde{X} = \tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{D} \cup \bigcup_i D_i \tag{22}$$

が得られる．ここに D_i はアーベル多様体 V/L を共通の底空間とする toric bundle である． D_i が定義する $\widetilde{X}$ の 2次のコホモロジー類を δ_i とかく．

X の Todd 種数に対する尖点 p の寄与を

$$\chi_\infty(\widetilde{\Gamma}\backslash\mathcal{D},\,p) = \left(\prod_i \frac{\delta_i}{1-e^{-\delta_i}}\right)_{n+m}[\widetilde{X}] \tag{23}$$

によって定義する．これは desingularization (22) の取り方に依存しない有理数である．

一方 G_1 の $\mathbf{R}$-rank $= r$ のとき，U におけるノルムを

$$N(e)=1,\quad N(g_1u) = (\det g_1)^{\frac{r}{n}}N(u) \quad (g_1 \in G_1^\circ,\, u \in U)$$

によって定義することができる．$N(u)$ は U 上の斉 r 次関数である．これを使って $\mathcal{C}$ の $\Gamma_1\cdot M$ に関するゼータ関数を

$$Z(\mathcal{C},\,\Gamma_1\cdot M;\,s) = \sum_{x:\Gamma_1\backslash\mathcal{C}\cap M} N(x)^{-s} \tag{24}$$

によって定義する．これは概均質空間の Sato-Shintani のゼータ関数の特別な場合である（[SO1] 参照）．このゼータ関数については関数等式はよく知られているが，それ以外の性質は未だ余りよく解明されていない.（最近，伊吹山–斉藤両氏による注目すべき研究がある.）

このゼータ関数の特殊値に関し，次のような関係式が成り立つと予想される．

$$Z\left(\mathcal{C},\,{}^t\Gamma_1\cdot M^*;\,-\frac{m}{r}\right) = c\,\frac{\chi_\infty(\widetilde{\Gamma}\backslash\mathcal{D},p)}{\mathrm{vol}(V/L)}. \tag{25}$$

ここに M^* は M の双対束，$\mathrm{vol}(V/L)$ はアーベル多様体 V/L の a に関する体積（i.e. a の L に関する Pfaffian）を表わす．c は $\Gamma_1\cdot M$ に無関係な定数（多分 ±1）である．

$V=0$, すなわち $\mathcal{D}$ が対称管状領域のとき，(25) が成立することは石田 [I1] によって（代数的に）証明された．これは本質的にヒルベルト・モジュラーの場合の "Hirzebruch 予想"（これは A.-D.-S., M によって解析的に証明された）の拡張であ

る（[SO1]，[O1]）．$V \neq 0$ で最も簡単な $(III_{1;m_2}) \simeq (I_{m_2+1,1})$, $F = \mathbf{Q}$ の場合，$m_1 = n = r = 1$ で上のゼータ関数はリーマンのゼータになり，(25) が $c = 1$ で成立することはよく知られていた．これが一般の F の場合にも成立することは最近尾形 [O2] によって（解析的方法で）示された．一般の場合に，分類論に依存しない，代数的証明を得ることが望まれる．

文　献

[I1] M.-N. Ishida, The duality of cusp singularities, Math. Ann. **294** (1992), 81-97.

[O1] S. Ogata, Hirzebruch's conjecture on cusp singularities, to appear in Math. Ann.

[O2] S. Ogata, Generalized Hirzebruch's conjecture for Hilbert-Picard modular cusps, Preprint.

[S1] I. Satake, Linear imbeddings of self-dual homogeneous cones, Nagoya Math. J. **46** (1972), 121-145; Corrections, ibid. **60** (1976), 219.

[S2] I. Satake, On classification of quasi-symmetric domains, Nagoya Math. J. **62** (1976), 1-12.

[S3] I. Satake, La déformation des formes hermitiennes et son application aux domaines de Siegel, Ann. Sci. l'Ecole Norm. Sup. **11** (1978), 445-449.

[S4] I. Satake, Algebraic Structures of Symmetric Domains, Iwanami Shoten & Princeton Univ. Press, 1980.

[S5] I. Satake, On the rational structures of symmetric domains, II, Tohoku Math. J. **43** (1991), 401-424.

[S6] I. Satake, On the rational structures of quasi-symmetric domains, in preparation.

[SO1] I. Satake and S. Ogata, Zeta functions associated to cones and their special values, in "Automorphic Forms and Geometry of Arithmetic Varieties" (Y. Namikawa & K. Hashimoto eds.), Adv. St. in Pure Math. **15**, Kinokuniya & North-Holland, 1989, pp.1-27.